Les seuls objets autorisés sont:

- une feuille A4 manuscrite recto-verso

- stylos, etc.

Les réponses finales à chaque question doivent être reportées sur l'énoncé dans les cases prévues à cet effet. La justification détaillée et propre est à rendre sur le papier quadrillé fourni.

Un feuillet quadrillé par exercice

Inscrivez votre nom sur chacun des feuillets! Et numérotez-les i/n

L'examen comporte 4 exercices, numérotés de 1 à 4

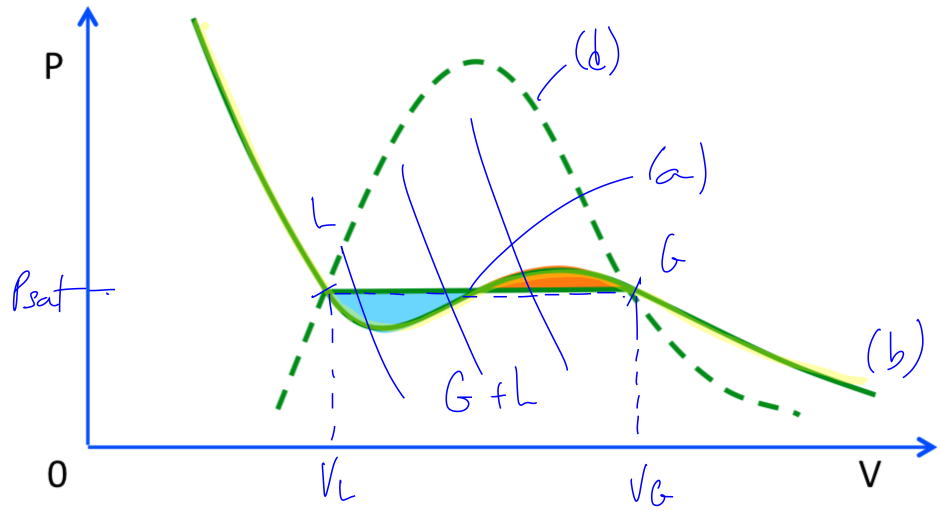
Le nombre de points maximum pour cet examen est de 40 points + 3 "points bonus", ce qui signifie que la note sera calculée comme si l'examen était de 40 points bien qu'il y en aie 43.

Ne pas ouvrir avant le début de l'épreuve

Nom : .... **Prénom :** .... **Section :** .... **No :** ......

Exercice 1. Règle de Maxwell pour un gaz de Van der Waals (VdW) (8 points + 1 pt bonus)

Le but du problème est de démontrer la règle de Maxwell pour un gaz de VdW qui énonce que le palier de liquéfaction est tel que les aires des deux surfaces comprises entre le palier de liquéfaction et l'isotherme de l'équation d'état de VdW sont égales (aires bleue et orange sur le schéma).



$\boxed{2}$

1. Sur le diagramme $(p - V)$ ci dessus indiquez **clairement et sans ambiguïté**:

0,25 (a) Le palier de liquéfaction - - - - -

si pas 100% clair si c'est ou ↓ 0,25 ← 0,5 (b) Une isotherme de l'équation d'état de VdW courbe

0,25 (c) La pression de vapeur saturante p_{sat} à la température de l'isotherme

0,25 (d) La courbe de saturation

0,25 (e) La région où on observe un mélange des formes liquides et gazeuses

0,25 (f) Le point L et le volume V_L au delà duquel il n'existe plus que la phase liquide lorsque l'on suit l'isotherme dessinée sur le schéma

0,25 (g) Idem pour le point G et le volume V_G au delà duquel il n'existe plus que la phase gazeuse

$\boxed{1}$

2. Soit dU la forme différentielle de l'énergie interne du gaz. $dU = TdS - pdV$, où T est la température, S l'entropie, p la pression et V le volume. Cette relation est elle toujours vraie ou seulement restreinte à des transformations réversibles ? Justifiez votre réponse sur les feuilles libres. 0,5

☒ Oui, toujours vraie ← 0,5

☐ Non, seulement réversibles

Si seulement choix ou si justification foireuse → 0,5/1

3. 1 Soit H l'enthalpie $H = U + pV$. Expliquer les motivations et l'intérêt d'introduire cette nouvelle fonction d'état pour certaines transformations que l'on précisera. Ecrire la différentielle dH de l'enthalpie en fonction de T, S, p et V. 0,5

   0,5 $dH =$ ....$TdS + Vdp$....

4. 1,5 Nous allons utiliser une approche semblable pour étudier des transformations à température constante (isotherme). On définit la fonction F[1]:

$$F = U - TS$$

   0,5 (a) F est elle une fonction d'état, Justifiez

   ☒ Oui ☐ Non

   0,5 (b) Ecrire la différentielle dF de F en fonction de S, T, p et V

   $dF =$ ....$-pdV - SdT$....

   0,5 (c) Expliquer pourquoi on peut en déduire que pour une transformation isotherme la quantité pdV est une différentielle totale exacte.

   ⚠ dV diff totale exacte
   ⇒ pdV pas forcément

5. 1,5 On considère maintenant la suite de transformations suivantes pour un gaz de VdW. Etape 1 : de G vers L en suivant le palier de liquéfaction et étape 2 de L vers G en suivant l'isotherme donnée par l'équation d'état du gaz de VdW.

   0,5 (a) Que vaut ΔF le long de ce trajet, justifiez.

   $\Delta F =$ ....0....

   0,5 (b) Que représente graphiquement $\int_{V_1}^{V_2} pdV$?

   0,5 (c) En déduire la règle de Maxwell.

6. 1+1 Le but est maintenant de trouver une relation liant V_G, V_L, a et b. On rappelle l'équation d'état d'un gaz de VdW pour une mole de gaz:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

   où a et b sont des constantes dépendantes du gaz.

   1 (a) Exprimer pdV pour un gaz de VdW, puis en déduire l'équation implicite (c'est à dire une équation du type $f(x, y, ...) = 0$) liant T, P_{sat}, V_G, V_L, a et b. **Ne pas essayer de la résoudre**.

   $f(T, P_{\text{sat}}, V_G, V_L, a, b) =$ ....$RT \ln \frac{V_G - b}{V_L - b} + a\left(\frac{1}{V_G} - \frac{1}{V_L}\right) - P_{sat}(V_G - V_L)$.... $= 0$

   1 (b) *Question Bonus :* utiliser ce résultat pour proposer une autre démonstration de la règle de Maxwell

1. Voir feuille

[1]La fonction F porte le nom d'énergie libre.

2. Oui, car T, S, p, V fonctions d'état

3. $dH = dU + d(pV) = -pdV + TdS + pdV + Vdp = TdS + Vdp$

   Utile pour isobare / changement de phases.

4. (a) Oui car U, T, S fonctions d'état

   (b) $dF = dU - d(TS) = TdS - pdV - TdS - SdT = -pdV - SdT$

   (c) Isotherme: dT=0 donc $dF = -pdV$; dF différentielle totale exacte, donc pour une isotherme -pdV différentielle totale exacte

5. (a) 0 car chemin cyclique et F fonction d'état

   (b) L'aire sous la courbe p(V) du diagramme (p, V) entre V_1 et V_2

   (c) On prend un chemin cyclique de V_L à V_L à l'aller le long du pallier, et au retour le long de la courbe de VdW, ce sont deux transformations isothermes, l'intégrale doit être nulle, une aire est comptée plus et l'autre moins, elles doivent être égales pour que la somme fasse 0.

6. (a)

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

$$pdV = \frac{RT}{V-b}dV - \frac{a}{V^2}dV$$

   En intégrant entre V_L et V_G, $p = p_{\text{sat}} =$ cte, et $T =$cte

$$p_{\text{sat}}(V_G - V_L) = RT \ln \frac{V_G - b}{V_L - b} + a(\frac{1}{V_G} - \frac{1}{V_L})$$

$$f = RT \ln \frac{V_G - b}{V_L - b} + a(\frac{1}{V_G} - \frac{1}{V_L}) - p_{\text{sat}}(V_G - V_L) = 0$$

   (b) $p_{\text{sat}}(V_G - V_L)$ est l'aire du rectangle limité par la courbe de saturation et les volumes V_L et V_G. $RT \ln \frac{V_G - b}{V_L - b} + a(\frac{1}{V_G} - \frac{1}{V_L})$ est l'aire sous l'isotherme de VdW, les 2 étant égales, la loi de Maxwell doit être vérifiée.

Nom : .... **Prénom :** .... **Section :** .... **No :** ......

Exercice 2 Une Montgolfière (10 points)

Dans tout l'exercice, l'air sera considéré comme un gaz parfait.

Pour les applications numériques, $M_O = 16$ g/mol; $M_N = 14$ g/mol et on prendra $R = 8$ J.mol^{-1}K^{-1}

On étudie une montgolfière à air chaud qui emporte 4 personnes. Sa masse m (ballon + nacelle + passagers + brûleur) est 700 kg et le volume du ballon $V = 2800$ m^3. Le ballon est *ouvert* à sa base afin de laisser entrer l'air chaud.

$\boxed{1,5}$

1. En supposant que l'air est composé de 20% de molécules d'oxygène O_2 et de 80% de molécules d'azote N_2, calculer la masse volumique de l'air, en fonction de $\mathrm{M_{air}}$, (masse molaire de l'air), p, R et T.

   1 $\quad \rho_{air} = M_{air} \dfrac{p}{RT}$

   A.N. Calculer la masse volumique de l'air au niveau du sol où

   $p = p_0 = 10^5$ Pa et $T = T_0 = 27°$C.

   0,5 $\quad$ A.N. : $\rho_0 =$ 600 kg/m^3

$\boxed{1}$

2. Exprimer la loi des gaz parfaits en fonction de p, la densité du gaz ρ, T et une constante R^* qui dépend de $\mathrm{M_{air}}$.

   0,5 $\quad p = R^* \rho T$

   0,5 $\quad$ Avec $R^* = \dfrac{R}{M_{air}}$

   $p = \dfrac{\rho T}{R^*}$ aussi ok. et ensuite $R^* = \dfrac{M_{air}}{R^*}$ $\quad R^* \to \dfrac{1}{R^*}$

1,3

3. En utilisant le principe d'Archimède, calculer la force ascensionnelle s'exerçant sur le ballon au niveau du sol, sachant que l'air dans le ballon est chauffé à T_b, en fonction de $p_0, V, g, R*, m, g$ et des températures T_0 et T_b.

$$F_{asc} = \frac{Vgp_0}{R^*}\left(\frac{1}{T_{ext}} - \frac{1}{T_b}\right) - mg$$

Si tout OK mais manque Masse du ballon $(-\frac{1}{T_b}) \to 1pt$

1,5

4. On cherche à déterminer $h_{\max}$, l'altitude maximale que peut atteindre le ballon. On suppose que la pression et la température décroissent linéairement avec l'altitude: $p(h) = p_0 - ah$ et $T(h) = T_0 - bh$.

   Trouver l'équation du 2nd degré permettant de déterminer $h_{\max}$. **Ne pas la résoudre!**

$$-abh^2 + h(bp_0 - a\Delta T + Ab) = AT_0 - p_0\Delta T$$ avec $A = \frac{mR^*T_b}{V}$ $(\Delta T = T_b - T_0)$

2

5. Dans la réalité, comme le ballon n'est pas fermé, il ne constitue pas en toute rigueur un volume fini et on ne peut pas appliquer le principe d'Archimède.

   1 (a) Quelle est la relation liant la variation de pression dp avec la masse volumique ρ, g, et la variation de hauteur dh ?

$$dp = -\rho g\, dh$$

   1 (b) Expliquer qualitativement pourquoi le ballon reste gonflé

1,5

6. Retrouver le même résultat qu'au point 3, en faisant le bilan des forces s'appliquant sur l'enveloppe du ballon. Pour simplifier les calculs, on supposera que le ballon est un cylindre vertical de section S, et de hauteur H et qu'il est ouvert à sa base par un trou de taille négligeable devant S.

1

7. Discuter la limite de validité de ce modèle.

---

1. $pV = nRT$ $\rho = \frac{m}{V} = M_{\text{air}}\frac{n}{V} = M_{\text{air}}\frac{p}{RT}$

   A.N 600 g/m^3

2. $\rho = M_{\text{air}}p/RT$ devient $p = (R/M_{\text{air}})\rho T$

$$p = R^*\rho T$$

$$R^* = \frac{R}{M_{\text{air}}}$$

3. Forces sur le ballon = poussée d'archimède $\vec{F}_A$ et poids du ballon et de l'air dedans $(m + m_{int})\vec{g}$

$$\vec{F}_{\text{asc}} = (\rho_0 gV)\vec{e}_z - (m + \rho_{\text{int}}gV)\vec{e}_z$$

$$F_{\text{asc}} = Vg\rho_{ext} - (Vg\rho_{int} + mg) = \frac{Vgp_0}{R^*}\left(\frac{1}{T_{ext}} - \frac{1}{T_b}\right) - mg$$

4. h_{max} est atteint quand $F_{\text{asc}} = 0$

$$F_{\text{asc}}(h) = \frac{Vgp(h)}{R^*}\left(\frac{1}{T_{ext}(h)} - \frac{1}{T_b}\right) - mg = 0$$

$$F_{\text{asc}}(h) = \frac{Vg(p_0 - ah)}{R^*}\left(\frac{1}{T_0 - bh} - \frac{1}{T_b}\right) - mg = 0$$

$$\frac{(p_0 - ah)(T_b - T_0 + bh)}{T_0 - bh} = \frac{mR^*T_b}{V} = A$$

$$(p_0 - ah)(\Delta T + bh) = A(T_0 - bh)$$

$$-abh^2 + h(bp_0 - a\Delta T + Ab) = AT_0 - p_0\Delta T$$

5. (a) Equilibre d'une couche d'atmosphère de masse volumique ρ

$$\sum \vec{F} = \vec{0} = -mg\vec{e}_z - p(h+dh)\mathcal{A}\vec{e}_z + p(h)\mathcal{A}\vec{e}_z$$

$$-\rho\mathcal{A}dhg = \mathcal{A}p(h+dh) - \mathcal{A}p(h)$$

$$dp = -\rho g dh$$

(b) L'air est plus chaud dans le ballon donc en tout point d'altitude h $\rho_{\text{int}} < \rho_{\text{ext}}$ donc $dp_{\text{int}} < dp_{\text{ext}}$ mais comme $dp < 0$ on a $0 > dp_{\text{int}} > dp_{\text{ext}}$ La pression diminue moins vite dans le ballon, elle est identique en bas, donc en tout point au dessus de la première couche, elle est supérieure dans le ballon par rapport à la pression atmosphérique, le ballon reste gonflé.

6.

$$\vec{F}_{\text{asc}} = \underbrace{\int_{\text{côté}} (p_i - p_e)d\mathcal{A}\vec{e}_\rho}_{\text{s'annule par symmétrie}} - \int_{\text{face inf}} \underbrace{(p_i - p_e)}_{0} S\vec{e}_z + \int_{\text{face sup}} (p_i - p_e)S\vec{e}_z - mg\vec{e}_z$$

Avec la relation de la question (5) $dp = -\rho g dh$ et en considérant ρ constant sur la hauteur du ballon et $p = R^*\rho T$

$$F_{\text{asc}} = ((p_0 - \rho_i gH) - (p_0 - \rho_e gH))S - mg = 0$$

$$gV(\rho_e - \rho_i) - mg = gV\left(\frac{p_0}{R^*T_{\text{ext}}} - \frac{p_0}{R^*T_{\text{b}}}\right) - mg = 0$$

On retrouve bien la même chose.

7. Ballon pas trop grand. Sinon on ne peut pas considérer ρ constant sur la hauteur du ballon pour le calcul.

   Limite de la troposphère (après T=cte)

   T ballon = cst, indépendante T ext

Nom : .... Prénom : .... Section : .... No : ......

Exercice 3 Un peu de thermo dans la cuisine (12 points)

Un considère une masse $m = 1$ kg d'eau à l'équilibre thermique dans une cuisine à $T_1 = 20°C$. Pour évaluer les ordres de grandeur, on prendra: Chaleur latente de fusion de la glace $L_f = 300$ kJ.K^{-1}; capacité calorifique massique de la glace $c_g = 2$ kJK^{-1}kg^{-1}; Capacité calorifique massique de l'eau $c_e = 4$ kJK^{-1}kg^{-1}. **Donner les formules littérales et ne faire les A.N. que si elles sont explicitement demandées.**

6

1. On place l'eau dans un récipient de capacité calorifique négligeable, et on la met dans le compartiment congélation du frigo, à $T_f = -5°C$. Le frigo fonctionne grâce à un compresseur de puissance $\mathcal{P} = 800$ W.

2,5

   (a) Quel est le temps minimal nécessaire pour avoir de la glace à -5°C dans le compartiment congélation, en fonction des températures, des capacités calorifiques, de L_f , de $\mathcal{P}$ et de m ?

   2 $\quad t_{\min} = \left[m\,C_e\,(T_1 - T_0) + m L_f + m\,C_g\,(T_0 - T_f)\right]/\mathcal{P} \cdot \frac{T_1 - T_f}{T_1}$

   A.N., donner l'ordre de grandeur de t

   0,5 $\quad t_{\min} =$ 1 minute

0,5

   (b) La transformation est-elle réversible ou irréversible? Justifier.

   ☐ Réversible

   ☒ Irréversible

2,5

   (c) Calculer en fonction des données de l'énoncé la variation d'entropie de l'eau ΔS, ainsi que $S_{\text{crée}}$ et $S_{\text{éch}}$

   1 $\quad \Delta S = m\,C_e \ln\frac{T_0}{T_1} - m\frac{L_f}{T_0} + m\,C_g \ln\frac{T_f}{T_0}$

   1 $\quad S_{\text{éch}}\; m\,C_e \frac{T_0 - T_1}{T_f} + m\frac{L_f}{T_f} + m\,C_g\frac{T_f - T_0}{T_f}$

   0,5 $\quad S_{\text{crée}}\; \Delta S - S_{\text{éch}}$

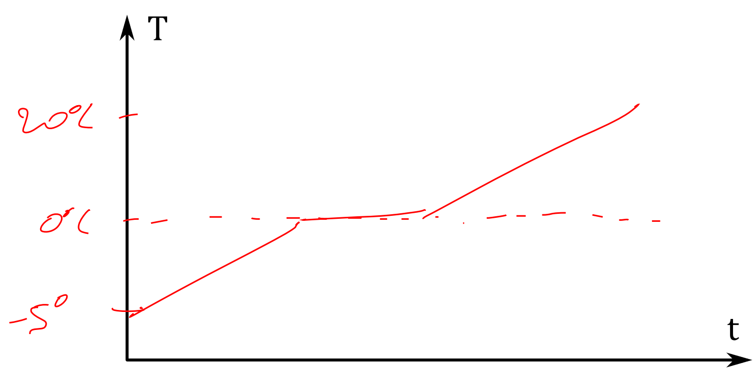
0,5

   (d) En fait, il a fallu cinq fois plus de temps que le temps évalué plus tôt. Quelle(s) sont la(les) raison(s) possibles? Que peut-on en conclure sur l'efficacité du frigo $\eta_{\text{réel}}$

2. Une fois la glace à $-5°C$, on la sort du compartiment congélation et on la place dans la cuisine, qui est toujours supposée à T_1.

   (a) Tracer l'évolution de la température en fonction du temps.

1-a Si $t = \frac{Q_f}{\mathcal{P}}$ (manque η_f) $\Rightarrow$ 1/2



Si il manque des infos (températures p.ex) → 0,5/1

0,5 (b) Quelle est la variation d'entropie sur cette transformation

$$\Delta S = \ldots -\Delta S \text{ de q. (1.c)} \ldots$$

0,5 (c) que peut-on dire qualitativement de $S_{\text{crée}}$ et $S_{\text{éch}}$

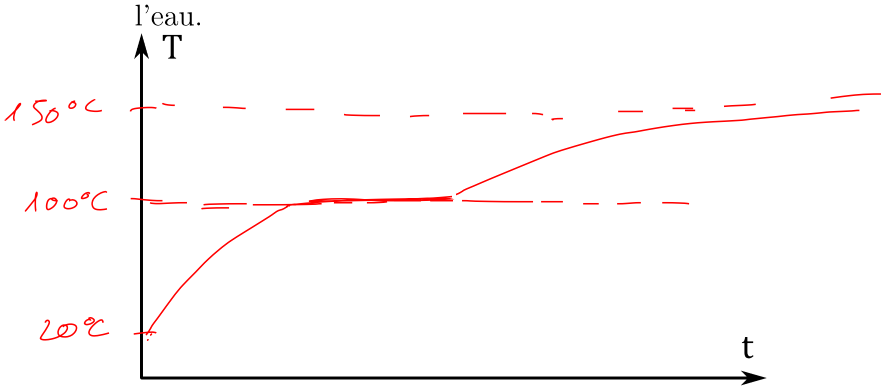
0,5 (d) en toute rigueur, et sur l'ensemble des deux étapes (eau mise à congeler, puis à dégeler) la température de la cuisine a-t-elle

☐ Augmenté ☐ Diminué ☐ Pas changé

3,5

3. On place maintenant l'eau à T_1 dans une casserole posée sur une plaque électrique qui porte la face inférieure de la casserole à $T_2 = 150°C$. On appelle λ la conductivité thermique du matériau du fond de la casserole, d son épaisseur et $\mathcal{A}$ son aire.

1 (a) Décrire qualitativement, et tracer sur un schéma l'évolution au cours du temps de la température du fond de la casserole en contact avec l'eau.



1,5 (b) au bout de combien de temps l'eau commence-t-elle à bouillir ? (On néglige l'évaporation).

$$t_1 = \frac{d\, m c_e}{\lambda \mathcal{A}} \ln \frac{T_1 - T_3}{T_2 - T_3}$$

Si pas ln et dT → 0,5/1,5 + commentaire "cf exo bac de feux"

1 (c) Combien de temps s'écoule entre le moment où l'eau commence à bouillir et celui où elle est complètement évaporée ?

$$t_2 = \frac{m L_v d}{\lambda \mathcal{A} (T_3 - T_2)}$$

1. (a) Efficacité max du frigo

$$\eta_f = \frac{1}{\frac{T_h}{T_b} - 1} = \frac{T_f}{T_1 - T_f} = \left|\frac{Q_b}{W}\right| = \left|\frac{Q_b}{\mathcal{P} t_{\text{min}}}\right|$$

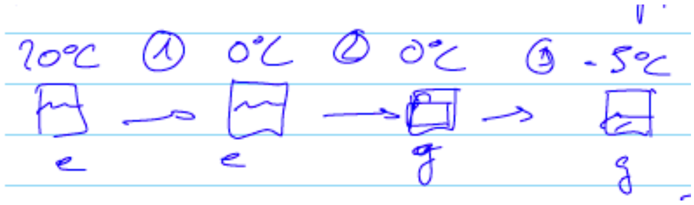
$$|Q_b| = mc_e(T_1 - T_0) + mL_f + mc_g(T_0 - T_f)$$

$$t_{\min} = \left[\frac{mc_e(T_1 - T_0) + mL_f + mc_g(T_0 - T_f)}{\mathcal{P}}\right] \frac{T_1 - T_f}{T_1}$$

A.N environ ~~500s (10 minutes~~) 50s = 1'

(b) Pas succession d'états d'équilibres -> irréversible

(c) On calcule ΔS sur une transformation réversible entre le mêmes états initial et final.



$$\Delta S = \int_1 \frac{mc_e dT}{T} + \int_2 \frac{-L_f dm}{T_0} + \int_3 \frac{mc_g dT}{T}$$

$$\Delta S = mc_e \ln\frac{T_0}{T_1} - \frac{mL_f}{T_0} + mc_g \ln\frac{T_f}{T_0}$$

(températures en Kelvin)

Pur le calcul de $S_{\text{éch}}$, la température est T_f

$$S_{\text{éch}} = \int_1 \frac{mc_e dT}{T_f} + \int_2 \frac{-L_f dm}{T_f} + \int_3 \frac{mc_g dT}{T_f}$$

$$S_{\text{éch}} = \frac{mc_e(T_0 - T_1)}{T_f} - \frac{mL_f}{T_f} + \frac{mc_g(T_f - T_0)}{T_f}$$

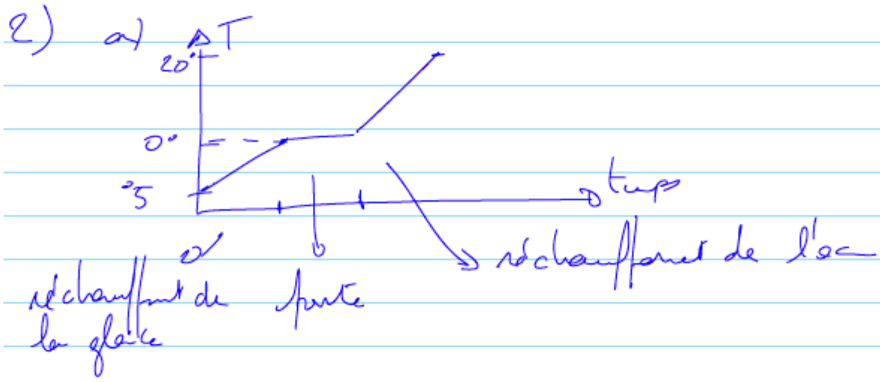
$$S_{\text{crée}} = \Delta S - S_{\text{éch}}$$

(d) l'efficacité du frigo réel est inférieure à l'efficacité Carnot théorique; le frigo est mal isolé; le compresseur ne marche pas tout le temps... ou tout autre(s) explications correcte. 1 raison = OK pour les points.

Si ≥ 3 bonnes raisons → +0,25

↳ le frigo est givré ⇒ mauvaise conduction.

2. (a)



(b) Le système revient à l'état initial. S fonction d'état $\Delta S_2 = -\Delta S_1$ trouvé à la question 1c.

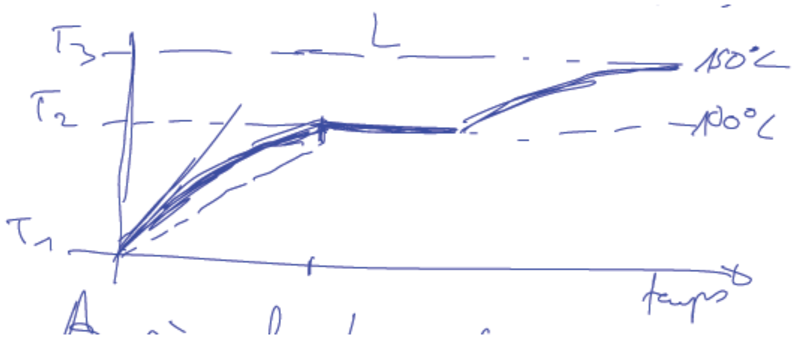
(c) Transfo irréversible. $S_{\text{créé}} > 0$. $S_{\text{éch}} = \Delta S - S_{\text{créé}}$, on récupère moins d'entropie de la cuisine que pour 1 transfo réversible. De plus les chaleurs sont les mêmes, mais la température de l'environnement supérieur dans partie (2), donc en norme $S_{\text{éch}}$ plus petit dans partie (2)

(d) Transfos irréversibles. Frigo et glace revenus à l'état d'avant -> augmenté.

3. (a) Au début, l'eau va chauffer de T_1 à $T_2 = 100°\text{C}$, le fond de la casserole aussi. Mais comme ΔT diminue, $\mathcal{P}$ transmise diminue, et donc ca chauffe de - en - vite.

eau à 100°C, elle s'evapore, température constante.

Ensuite, le fond va progressivement chauffer -> 150°C, avec un comportement asymptotique.



(b) On cherche au bout de combien de temps $T_e = 100°\text{C}$ id. lac de Joux T temps à l'interface

$$P = \frac{\lambda \mathcal{A}(T_3 - T)}{d} = \frac{dQ}{dt} = \frac{mc_e dT}{dt}$$

$$\frac{dT}{T - T_3} = -\frac{\lambda \mathcal{A}}{dmc_e} dt$$

$$\ln \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_3} = -\frac{\lambda \mathcal{A}}{dmc_e} t_1$$

$$t_1 = \frac{dmc_e}{\lambda \mathcal{A}} \ln \frac{T_1 - T_3}{T_2 - T_3}$$

(c) C'est encore plus facile,

$$P = cte = \frac{\lambda \mathcal{A}}{d}(T_3 - T_2) = \frac{Q_{\text{evap}}}{t_2}$$

$$Q_{\text{evap}} = mL_v$$

$$t_2 = \frac{mL_v d}{\lambda \mathcal{A}(T_3 - T_2)}$$

Nom : .... Prénom : .... Section : .... No : ......

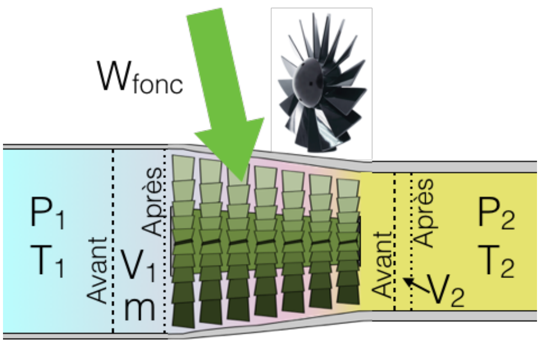
Exercice 4 Moteur d'avion (10 points + 2 points bonus)

Le but du problème est d'étudier un modèle simplifié de réacteur d'avion. La plupart des questions nécessitent très peu de calculs et beaucoup sont indépendantes si l'on admet le résultat de la question I.3. Toutes les évolutions sont considérées quasi-statiques et les gaz se comportent comme des gaz parfaits de coefficient adiabatique γ, de capacité calorifique massique à volume constant c_V et à pression constante c_p.

I– Première partie

On s'intéresse à des systèmes qui laissent entrer ou sortir de la matière. On se limitera à des régimes stationnaires.

On s'intéresse tout d'abord à un compresseur dont la fonction est de prélever en amont un volume V_1 d'un gaz à la pression constante P_1 et de le transférer en aval à la pression constante P_2. Pour ce faire le compresseur est constitué d'une série d'hélices en rotation. Ces hélices sont actionnées en leur fournissant un travail mécanique W_{fonc}.



On suppose qu'il n'y a pas d'échanges de chaleur avec l'extérieur. On considère une masse, m, de gaz qui traverse le compresseur. Quand le compresseur reçoit le travail W_{fonc}, un volume V_1 à P_1, T_1 de gaz est prélevé et injecté en sortie pour former un volume V_2 à P_2, T_2.

$\boxed{1}$

1. Ecrire le travail W reçu par la masse m de gaz en fonction de U *ou* H, puis en fonction de m T_1, T_2, c_V *et/ou* c_p.

   $W =$ ...ΔU............................... $=$ ....$mc_v(T_2-T_1)$..............................

   0,5 0,5

$\boxed{1}$

2. Exprimer le travail W reçu par le gaz en fonction de W_{fonc} travail nécessaire pour faire fonctionner le compresseur, P_1, V_1, P_2 et V_2;

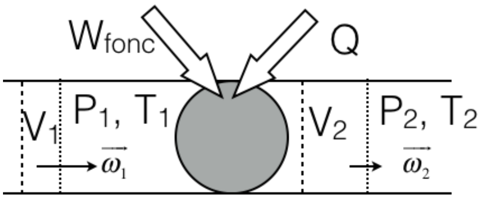
   $W =$ ...$+P_1V_1 - P_2V_2 + W_{fonc}$......... 0,5

   En déduire W_{fonc} en fonction de U *ou* H, puis en fonction de m T_1, T_2, c_V *et/ou* c_p.

   $W_{\text{fonc}} =$ ....ΔH............................ $=$ ....$mc_p(T_2-T_1)$.............................

   0,25 0,25

On considère maintenant le cas général d'un système qui prélève une masse m de gaz d'un réservoir à pression constante P_1 et le réinjecte dans un réservoir à la pression constante P_2. Pour ce faire on fournit à ce système un travail mécanique W_{fonc} et une quantité de chaleur Q.



De plus le gaz dans le compartiment 1 arrive avec une vitesse ω_1, une énergie cinétique E_{c1} et en sort dans 2 avec une vitesse ω_2 et une énergie cinétique E_{c2}. On considère qu'il n'y a pas de variation d'énergie potentielle.

1

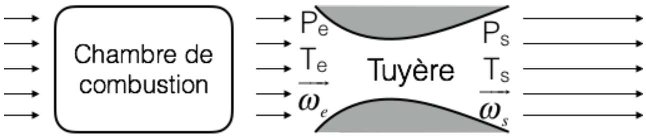
3. Montrer que

$$\Delta H + \Delta E_c = Q + W_{\text{fonc}}$$

On pourra admettre ce résultat par la suite.

II– Deuxième partie

Un réacteur d'avion est constitué de deux blocs, le premier appelé chambre de combustion, dont nous venons d'étudier une partie, dont la fonction est de délivrer un gaz à une température T_e, une pression P_e et s'écoulant à une vitesse ω_e dans un second élément appelée tuyère. La tuyère est un élément rigide divergent qui ne reçoit aucun travail et dans lequel les transformations sont également adiabatiques. Sa fonction est d'éjecter les gaz avec une grande énergie cinétique ce qui par réaction engendrera la poussée du réacteur. Nous allons tout d'abord étudier cette tuyère. On notera T_s, P_s et ω_s les températures pressions et vitesses en sortie. On considère une masse m de gaz qui traverse la tuyère.



1

4. Exprimer T_s en fonction de T_e, P_e, P_s et γ.

$$T_s = T_e\left(\frac{P_e}{P_s}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

1

5. Exprimer la vitesse de sortie des gaz, ω_s, en fonction de ω_e, m, c_p, T_e P_s et P_e.

$$\omega_s = \left[\omega_e^2 + 2c_pT_e\left[\left(\frac{P_e}{P_s}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1\right]\right]^{1/2}$$

(1)

6. *Question bonus :* On trouve typiquement des valeurs de ω_s entre quelques 100 et quelques 1000 m/s. Au delà de quelles vitesses d'éjection notre modèle n'est très probablement plus valide ?

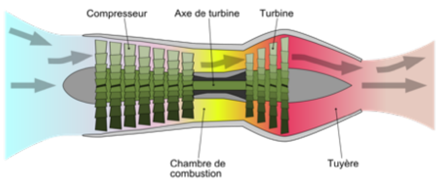
Vitesse du son ; Rep "vitesses relativistes" → 0,5

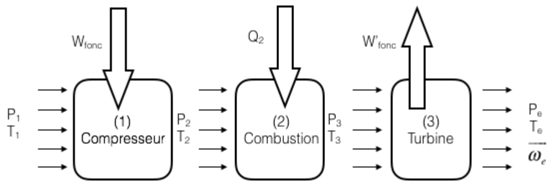
(1)

7. *Question bonus :* Quelle est la force de poussée, F, du réacteur si celui ci est traversé par un débit massique d'air D

$F =$ ....

On s'intéresse maintenant à la chambre de combustion en amont de la tuyère. Elle est constituée (1) du compresseur vu en (I) dans lequel les transformations sont adiabatiques, le compresseur reçoit une énergie mécanique W_{fonc} pour fonctionner; (2) une chambre où est injecté le kérosène et a lieu la combustion, dans cette partie on suppose les transformations isobares et le gaz reçoit une quantité de chaleur Q_2, et où il n'y a pas de pièces mécaniques qui fournissent un travail mécanique; (3) une turbine dans laquelle se produit une détente adiabatique et qui fonctionne selon le principe inverse du compresseur dont la fonction est i) de délivrer les gaz à l'entrée de la tuyère et ii) de générer un travail moteur qui est intégralement utilisé pour faire fonctionner le compresseur.





Dans la suite du problème on néglige l'énergie cinétique des gaz à l'entrée et dans la chambre et en entrée de tuyère devant leur énergie cinétique à l'éjection (ω_1 et $\omega_e \ll \omega_s$).

2

8. Remplir le tableau ci-dessous donnant les températures et pressions à chaque étape. On exprimera les résultats en fonction de T_1, du taux de compression $\alpha = P_2/P_1$, Q_2 et γ. Indication pour exprimer T_e en fonction des autres températures : écrire que toute l'énergie mécanique utile fournie par la turbine est utilisée pour actionner le compresseur.

	1	2	3	e	s
P	P_1				
T	T_1				

.25/case

2

9. Remplir le tableau ci-dessous donnant W_{fonc} le travail reçu des pièces mécaniques et Q la chaleur reçus à chaque transformations. On exprimera les résultats en fonction de m, c_p, T_1, T_2 et Q_2.

	1 -> 2	2–>3	3->e	e->s
W_{fonc}				
Q				

.25/case

1

10. Comment est définie l'efficacité du réacteur? L'exprimer en fonction de données du problème.

$\eta =$ ....

1. $\Delta U = Q + W$ Adiabatique $Q = 0$ $\Delta U = W$
   GP $\Delta U = mc_v(T_2 - T_1)$

2. Le gaz reçoit $p_1\Delta V_1$ du côté avant $p_2\Delta V_2$ et W_{fonc} entre.

$$
\begin{aligned}
W &= p_1\Delta V_1 + p_2\Delta V_2 + W_{\text{fonc}} = p_1V_1 + p_2V_2 + W_{\text{fonc}} \\
\Delta H &= \Delta U + p_2V_2 + p_1V_1 = W + p_2V_2 + p_1V_1 = W_{\text{fonc}}
\end{aligned}
$$

   G.P. $\Delta H = mc_p(T_2 - T_1)$

3. Avec E_c et E_p

$$\Delta E = \Delta E_c + \cancel{\Delta E_p} + \Delta U = W + Q$$

   Cas général $Q \neq 0$.

   $\Delta H = \Delta U + p_1V_1 + p_2V_2 = Q + W - \Delta E_c + p_2V_2 + p_1V_1 = Q - \Delta E_c + \underbrace{W + p_2V_2 + p_1V_1}_{W_{\text{fonc}}}$

$$\Delta H + \Delta E_c = Q + W_{\text{fonc}}$$

4. Adiabatique réversible $p_eV_e^{\gamma} = p_sV_s^{\gamma}$ ou $p_e^{1-\gamma}T_e^{\gamma} = p_s^{1-\gamma}T_s^{\gamma}$

$$T_s = T_e\left(\frac{p_e}{p_s}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

5.

$$
\begin{aligned}
\Delta E_c + \Delta H &= Q + W_{\text{fonc}} = 0 + 0 \\
\Delta E_c = \frac{1}{2}m\omega_s^2 - \frac{1}{2}m\omega_e^2 &= \Delta H = mc_p(T_s - T_e)
\end{aligned}
$$

$$\omega_s = \omega_e - 2c_pT_e\left[\left(\frac{p_e}{p_s}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1\right]$$

6. vitesse du son

7. $F = D\omega_s$

8. 1 ->2 adiabatique $T_2 = T_1(p_2/p_1)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_1\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$
   2 ->3 isobare $\Delta H = Q_2 = mc_p(T_3 - T_2)$ $T_3 = T_2 + Q_2/(mc_p)$
   3-> e adiabatique $p_e = p_3(T_e/T_3)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$
   $\Delta H_{3e} = W'_{\text{fonc}} = mc_p(T_e - T_3) = -W_{\text{fonc}} = -\Delta H_{12} = -mc_p(T_2 - T_1)$
   $T_e = T_3 - T_2 - T_1 = T_1\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + Q_2/mc_p - T_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + T_1$

$$p_e = \alpha p_1\frac{T_1 + Q_2/mc_p}{T_1\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + Q_2/mc_p}$$

   e -> s tuyère $Q = 0$; $W = 0$; $\Delta E_c + \Delta H = 0$
   sortie à p_1 donc $p_s = p_1$
   adiabatique

$$T_s = T_e\left(\frac{p_s}{p_e}\right) = \frac{1}{\alpha}(T_1\alpha^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \frac{Q_2}{mc_p})$$